

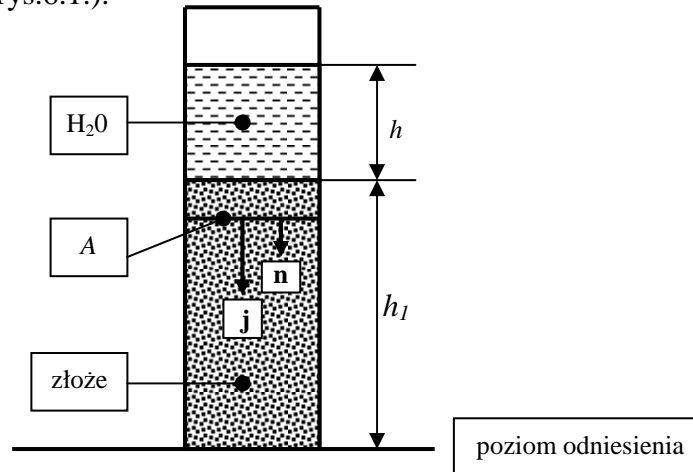
## Ćwiczenie 6

### SZACOWANIE WSPÓŁCZYNNIKA FILTRACJI CIECZY PRZY STAŁYM CIŚNIENIU HYDROSTATYCZNYM

#### 6.1. Podstawy teoretyczne

##### 6.1.1. Rys historyczny

Prawa przepływu filtracyjnego sformułował francuski inżynier H. P. G. Darcy (1803-1858) w 1854 roku w trakcie obserwacji i pomiarów przepływu wody w filtrach wodociągowych, które budował w Dijon. Oprócz obserwacji w naturze przeprowadzał on skrupulatne badania laboratoryjne przepływów w kolumnach filtracyjnych (rys.6.1.).



Rys. 6.1. Schemat kolumny filtracyjnej.

Darcy podał formułę empiryczną określającą natężenie przepływu cieczy  $j$  przepływającej przez złożę w zależności od gradientu ciśnienia

$$\mathbf{j} = -k\nabla p \quad \xrightarrow{\text{proces jednowymiarowy}} \quad j = -k \frac{(h+h_1)\rho_w g}{h_1}, \quad (6.1)$$

gdzie:  $\mathbf{j}$  – gęstość strumienia cieczy czyli ilość cieczy przepływającej przez jednostkę powierzchni prostopadłej do kierunku przepływu w jednostce czasu, [kg/(m<sup>2</sup>s)],

$p$  – ciśnienie, [Pa],

$\rho_w$  – gęstość wody, [kg/m<sup>3</sup>],

$g$  – przyspieszenie ziemskie, [m/s<sup>2</sup>],

$k$  – współczynnik filtracji, [kg/(m s Pa)],

$h$  – wysokość słupa wody, [m],

$h_1$  – grubość złoża, [m],

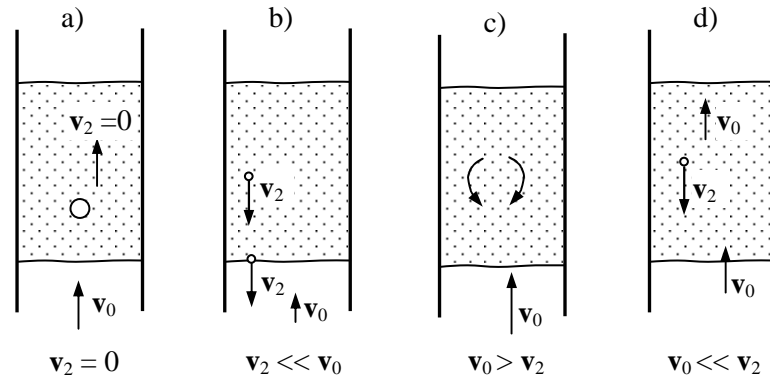
$\nabla$  – operator gradientu.

##### 6.1.2. Rodzaje przepływów filtracyjnych

Przepływy w rozdrobnionych złożach ciał stałych można z uwagi na kierunki ruchu obu faz podzielić na:

- przepływ przez złożę nieruchome, kiedy cząstki złoża spoczywają na nieruchomym sicie. Wtedy  $\mathbf{v}_0 \neq 0$ ,  $\mathbf{v}_1 \neq 0$  a  $\mathbf{v}_2 = 0$ , gdzie indeks (0) oznacza ciecz, (1) - rozdrobnione kłaczkę a (2) złożę ziarniste (rys. 6.2a),
- przepływ przez złożę ruchome, kiedy np. ziarna się obsuwają (rys. 6.2b),
- przepływ przez złożę fluidalne, kiedy po przekroczeniu pewnej prędkości przepływu cieczy  $\mathbf{v}_1$  ziarna zostaną upłynnione. Ziarna unoszą się wówczas w płynie tworząc pseudostałą fazę fluidalną (rys. 6.2c),
- przepływ sedymentacyjny polegający na zagęszczeniu się zawiesin w wyniku osadzania się cząstek mieszaniny (kłaczków) na ziarnach złoża (rys. 6.2d).

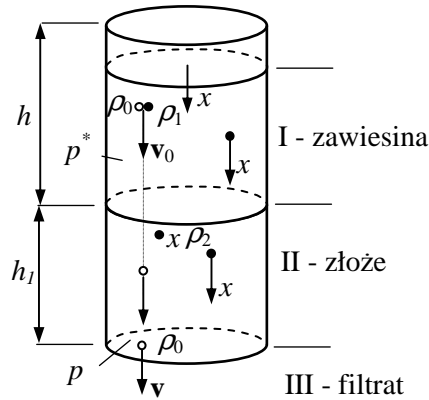
Prezentowane typy przepływów przedstawia schematycznie rys. 6.2.



Rys. 6.2. Przepływy mieszaniny przez złożo ziarniste.

### 6.1.3. Przepływy filtracyjne przez nieruchome złożo

Analizować będziemy przepływ dwuskładnikowej zawiesiny przez złożo filtracyjne. W trakcie przepływu przez złożo dochodzi do wytrącania się osadu filtracyjnego i przesączania czystej cieczy czyli filtratu.



Rys. 6.3. Przepływy przez nieruchome złożo.

W procesie można wydzielić 3 strefy przepływów o różnej kinematyce, a mianowicie:

I – strefa zawiesiny (ciecz o gęstości  $\rho_0$  i kłaczkami o gęstości  $\rho_1$ ),

II – strefa złoża - osadu (ciecz  $\rho_0$ , kłaczkami  $\rho_1$  i materiał złoża o gęstości  $\rho_2$  oraz adsorbat  $\rho_3$ ),

III – strefa jednoskładnikowego filtratu – ciecz.

W strefie osadu z zawiesiny wytrącają się kłaczkami  $\rho_1$  tracąc prędkość tak, iż do strefy filtratu III wpływa czysta ciecz.

W przybliżeniu proces ten można w strefie I przedstawić w postaci równania ciągłości

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 + \rho_1) + \frac{\partial}{\partial x}[(\rho_0 + \rho_1)\mathbf{v}] = 0, \quad \mathbf{v}^0 = \mathbf{v}^1 = \mathbf{v}. \quad (6.2)$$

W strefie II ( $\mathbf{v}^2 = \mathbf{v}^3 = 0$ ) równania cząstkowych bilansów masy należy zapisać dla każdego składnika z osobna

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho^0 \mathbf{v}^0) = 0, \quad \frac{\partial \rho^1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho^1 \mathbf{v}^1) = R^1, \quad \frac{\partial \rho^3}{\partial t} = R^3. \quad (6.3)$$

Prędkość konwekcyjną  $\mathbf{w}$  określa wzór

$$\rho \mathbf{w} = \rho^0 \mathbf{v}^0 + \rho^1 \mathbf{v}^1, \quad (6.4)$$

stąd w analizowanym przypadku wystąpią strumienie konwekcyjne  $\rho^\alpha \mathbf{w}$  i dyfuzyjne

$$\mathbf{j}^1 = \rho^1 \mathbf{u}^1, \quad \mathbf{u}^1 = \mathbf{v}^1 - \mathbf{w} \quad \text{oraz} \quad \mathbf{j}^0 = \rho^0 \mathbf{u}^0, \quad \mathbf{u}^0 = \mathbf{v}^0 - \mathbf{w}. \quad (6.5)$$

Wreszcie w strefie filtratu stwierdza się jednoskładnikowy przepływ

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho^0 \hat{v}^1) = 0. \quad (6.6)$$

Oczywiście na granicach stref I i II oraz II i III muszą zachodzić warunki równości strumieni wypływających z poprzedniej strefy i wpływających do następnej.

#### 6.1.4. Wyznaczanie współczynnika przepuszczalności złoża przy stałym ciśnieniu

Z punktu widzenia filtracji przez kolumnę interesujący jest głównie przepływ przez złożo, w którym występują trzy strumienie  $\rho \mathbf{w}$ ,  $\mathbf{j}^0$  i  $\mathbf{j}^1$ , zaś w procedurze pomiarowej istotny jest tylko pewien sumaryczny przepływ zastępczy

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{w} + \mathbf{j}^0 + \mathbf{j}^1. \quad (6.7)$$

Przepływ ten w przybliżeniu opisują zależności

$$\rho \mathbf{w} = \rho^0 \mathbf{v}^0 + \rho^1 \mathbf{v}^1, \quad \text{czyli} \quad \mathbf{J} = \mathbf{J}^0 + \mathbf{J}^1, \quad (6.8)$$

gdzie:

$$\mathbf{J}^0 = -k_0 \nabla p, \quad \mathbf{J}^1 = -k_1 \nabla p, \quad \text{czyli} \quad \mathbf{J} = -k \nabla p. \quad (6.9)$$

Stąd poszukiwaną wartość współczynnika przepuszczalności w złożu  $k$  dla przypadku przepływu jednowymiarowego otrzyma się z relacji

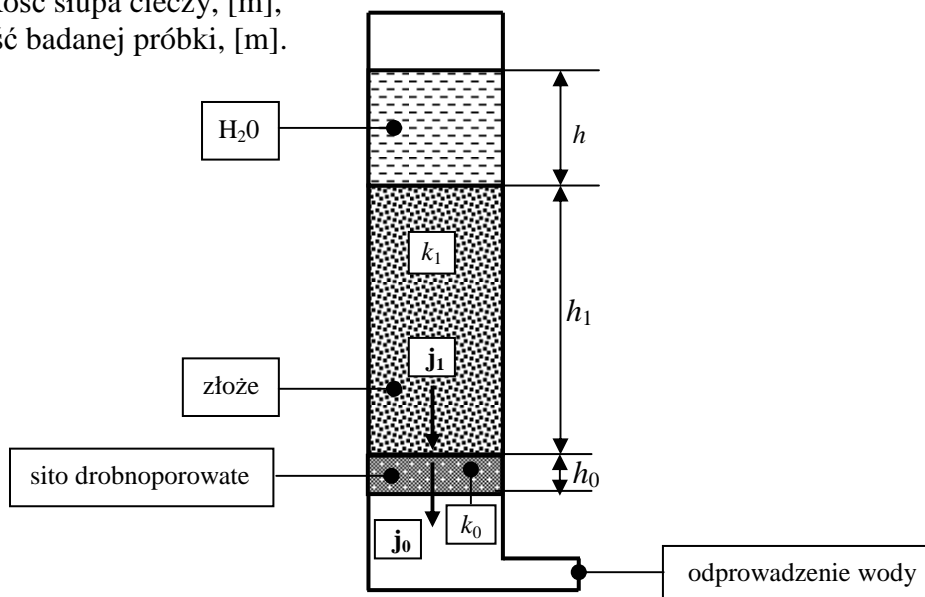
$$k = k_0 + k_1, \quad \frac{\partial p}{\partial x} \cong \frac{p - p^*}{h_1} + \rho g. \quad (6.10)$$

## 6.2. Przebieg badania

W praktyce laboratoryjnej badanie współczynnika filtracji złoża przeprowadza się w kolumnach filtracyjnych o schemacie przedstawionym na rysunku 6.4, w których złożo spoczywa na drobnoporowatym sicie wykonanym ze spieku szklanego o znanym współczynniku filtracji  $k_0$ . W warunkach pomiaru, kiedy to ma się do czynienia z przepływem jednowymiarowym prawo Darcyego przyjmuje postać

$$j = -k \frac{\partial p}{\partial x} = -k \frac{\rho_w g h}{d}, \quad (6.11)$$

gdzie:  $h$  – wysokość słupa cieczy, [m],  
 $d$  – grubość badanej próbki, [m].



Rys. 6.4. Schemat kolumny filtracyjnej.

W warunkach ustalonego przepływu, kiedy z kolumny filtracyjnej w tych samych okresach czasu odprowadzana jest taka sama masa wody, strumienie  $j_1$  w badanym złożu i  $j_0$  w drobnoporowatym sicie są sobie równe

$$j_1 = -k_1 \nabla p_1 = -k_1 \frac{\rho_w g (h + h_1)}{h_1}, \quad (6.12)$$

$$j_0 = -k_0 \nabla p_0 = -k_0 \frac{\rho_w g (h + h_1 + h_0)}{h_0}, \quad (6.13)$$

$$j_1 = j_0 \quad \Rightarrow \quad -k_1 \frac{\rho_w g (h + h_1)}{h_1} = -k_0 \frac{\rho_w g (h + h_1 + h_0)}{h_0}, \quad (6.14)$$

$$k_1 = \frac{j_0}{\rho_w g} \frac{h_1}{(h + h_1)} = k_0 \frac{h_1}{h_0} \frac{(h + h_1 + h_0)}{(h + h_1)}. \quad (6.15)$$

W ten sposób otrzymano wzór na współczynnik filtracji złoża  $k_1$  w zależności od współczynnika filtracji zastosowanego w kolumnie filtracyjnej szklanego spieku  $k_0$ . Oczywiście możliwości wykorzystania ostatecznej wersji relacji (6.15) ograniczone są potrzebą wcześniejszej znajomości współczynnika  $k_0$ .

W celu eksperymentalnego wyznaczenia współczynnika filtracji  $k_1$  postępuje się w następujący sposób:

- złożo filtracyjne należy nasycić wodą pozostawiając je przez pewien czas w naczyniu wypełnionym wodą,
- zbiornik do którego będzie odprowadzana przesączająca się woda ustawia się pod kolumną na wadze laboratoryjnej,
- nasycone złożo przelewa się wraz z wodą do kolumny filtracyjnej tak aby woda znajdowała się na poziomie  $h$  nad górną powierzchnią złoża,
- w celu zapewnienia stałego poziomu wody  $h$  w kolumnie filtracyjnej, do kolumny podłącza się od góry wąż doprowadzający wodę; natomiast nadmiar wody odprowadzany jest z kolumny przez przelew do odpowiedniego zbiornika,
- rejestruje się zmiany masy naczynia z przesączającą się wodą w czasie czekając aż przepływ stanie się ustalony,
- eksperyment wykonuje się w temperaturze pokojowej 20°C pamiętając o tym, że przy spadku temperatury od 30°C do 10°C jej lepkość wzrasta o ponad 50%.

### 6.3. Opracowanie wyników i oszacowanie błędu pomiaru

Po ustaleniu się przepływu zmiany masy naczynia, do którego sphywa przesączająca się z kolumny filtracyjnej woda, stają się liniową funkcją czasu. Wówczas współczynnik filtracji złoża obliczyć można z następującego wzoru wynikającego z zależności (6.15)

$$k_1 = \frac{j_w}{\rho_w g A} \frac{h_1}{(h + h_1)}, \quad (6.16)$$

gdzie:  $k_1$  – współczynnik filtracji złoża, [kg/(m s Pa)]

$j_w$  – strumień wody wypływającej z kolumny filtracyjnej, [kg/s]

$A$  – pole przekroju poprzecznego złoża, [m<sup>2</sup>],

$\rho_w$  – gęstość wody, [kg/m<sup>3</sup>],

$g$  – przyspieszenie ziemskie, [m/s<sup>2</sup>],

$h$  – wysokość słupa wody, [m],

$h_1$  – grubość złoża, [m].

Strumień wody wypływającej z kolumny filtracyjnej dany jest zależnością

$$j_w = \frac{\Delta m}{\Delta t}, \quad \Delta m = m(t_n) - m(t_{n-1}), \quad \Delta t = t_n - t_{n-1}, \quad (6.17)$$

gdzie:  $\Delta m$  - zmiana masy naczynia z wodą w danym kroku czasowym, [kg],

$\Delta t$  - przyrost czasu, [s].

Wartość współczynnika  $k_1$  należy obliczyć dla danego złoża jako średnią arytmetyczną ze wszystkich odczytów, dla których zmiany masy naczynia z wodą w czasie były liniowe.

Błąd pomiaru można oszacować z zależności

$$\delta k_1 = \frac{1}{\rho_w g} \left( \frac{h_1}{(h+h_1)A} \delta j_p + \frac{h_1 j_p}{(h+h_1)A^2} \delta A + \frac{h j_p}{(h+h_1)^2 A} \delta h_1 + \frac{h_1 j_p}{(h+h_1)^2 A} \delta h \right), \quad (6.18)$$

gdzie:  $\delta j_w$  - błąd pomiaru strumienia wody, [kg/s],

$\delta h_1$  - błąd przy wyznaczaniu wysokości złoża, [m],

$\delta h$  - błąd przy wyznaczaniu wysokości słupa wody, [m],

$\delta A$  - błąd przy określaniu pola przekroju złoża, [m<sup>2</sup>].

Błąd przy oznaczaniu strumienia wody określa się ze wzoru

$$\delta j_w = \frac{1}{\Delta t} \delta \Delta m + \frac{\Delta m}{(\Delta t)^2} \delta \Delta t, \quad (6.19)$$

gdzie:  $\delta \Delta m$  - błąd przy określaniu przyrostu masy równy podwojonej dokładności wagi, [kg],

$\delta \Delta t$  - błąd przy określaniu przyrostu czasu, [s].

#### 6.4. Zakres opracowania

Opracowanie powinno zawierać:

- opis eksperymentu wraz z podaniem warunków pomiaru (temperatury i wilgotności powietrza otoczenia, temperatury wody) oraz parametrów badanego złoża (średnicy ziaren i jego zanieczyszczenia),
- omówienie wzoru opisującego współczynnik filtracji  $k_1$ ,
- tabelę pomiarów zawierającą pary  $(t, m)$  czyli czas i masę naczynia do którego odprowadzana jest przesączająca się woda,
- wykres zależności masy naczynia z wodą od czasu w układzie współrzędnych  $(t, m)$ ,
- obliczenia strumieni  $j_w$  w poszczególnych krokach czasowych wraz z ustaleniem chwili kiedy przepływ stał się ustalony,
- obliczenia współczynnika filtracji  $k_1$  w poszczególnych krokach czasowych dla przepływu stacjonarnego,
- obliczenia uśrednionej wartości  $k_1$  i oszacowanie błędu pomiaru.